# OPERATIONS SUR LES NOMBRES RELATIFS EN ECRITURE DECIMALE

## I. Notion de nombres relatifs :

Les nombres connus jusqu'à présent étaient des nombres positifs.
Il existe aussi des nombres négatifs. *(Introduits pour que toutes les soustractions de nombres positifs aient un résultat)*
Les nombres positifs et les nombres négatifs constituent les nombres relatifs.

**Définition :**

Les nombres relatifs sont constitués de nombres positifs et de nombres négatifs.

- Un nombre relatif positif s'écrit avec le signe $+$ ou sans signe.
- Un nombre relatif négatif s'écrit avec le signe $-$.

0 est le seul nombre à la fois positif et négatif.
Deux nombres relatifs qui ne diffèrent que par leur signe sont opposés.

Remarque : Les nombres relatifs qui sont des entiers sont les nombres entiers relatifs.

**Exemples :**

- $+3$ *(Déjà connu sous la notation 3)* est un nombre relatif positif.
- $-3$ est un nombre relatif négatif.
- $+3$ et $-3$ sont des nombres opposés.

## II. Opérations sur les nombres relatifs en écriture décimale :

### 1) Additions :

**Propriété :**

Pour additionner deux nombres relatifs de **même signe**, on additionne leurs distances à zéro et on garde le signe commun.

Pour additionner deux nombres relatifs de **signes contraires**, on soustrait la plus petite distance à zéro de la plus grande et on prend le signe de celui qui a la plus grande distance à zéro.

**Exemples :**

- $(+4) + (+5) = +(4+5) = +9$
- $(-4) + (-5) = -(4+5) = -9$

On a gardé le signe commun aux deux nombres, puis on a fait l'addition des distances à zéro.

---

- $(+4) + (-5) = -(5-4) = -1$
- $(-4) + (+5) = +(5-4) = +1$

On a pris le signe de la plus grande distance à zéro et on a fait la soustraction des distances à zéro.

Remarque : La somme de deux nombres relatifs opposés est égale à 0.

### 2) Soustractions :

**Propriété :**

Soustraire un nombre relatif revient à additionner son opposé.
Autrement dit, si $a$ et $b$ sont deux nombres relatifs alors $a - b = a + (-b)$

**Exemples :**

- $(+4) - (+5) = (+4) + (-5) = +4 - 5 = -1$
- $(-4) - (-5) = (-4) + (+5) = -4 + 5 = +1$

### 3) Multiplications :

Pour déterminer le signe d'un produit de nombres relatifs en écriture décimale, on utilise la propriété suivante appelée règle des signes.

**Propriété :**

- Le produit de deux nombres relatifs de même signe est un nombre positif.
- Le produit de deux nombres relatifs de signes contraires est un nombre négatif.

Une fois le signe déterminé, il ne reste plus qu'à multiplier les distances à zéro.

**Preuve :**

Soient $a$, $b$ et $c$ trois nombres positifs

Comme la multiplication est distributive par rapport à l'addition, on a : $a(b+c) = ab + ac$

Si l'on pose $c = -b$, on a donc $a\big(b + (-b)\big) = ab + a(-b)$
Cela revient donc à : $a(b-b) = ab + a(-b)$
C'est-à-dire, $0 = ab + a(-b)$ *(Egalité 1)*
Par conséquent, $a(-b) = -(ab)$

Maintenant, si l'on pose $a = -d$ dans l'égalité 1, on obtient : $0 = -db + (-d)(-b)$
Et par conséquent, $(-d)(-b) = db$
Ce qui prouve bien la règle des signes.

**Exemples :**

$4 \times 3 = 12$ $(-4) \times (-3) = 12$ $(-4) \times 3 = -12$ $4 \times (-3) = -12$

Produits particuliers :

- Multiplication par 1 : Le produit d'un nombre relatif par 1 est égal à ce nombre.
- Multiplication par 0 : Si l'un des facteurs d'un produit est nul, alors ce produit est nul.
- Multiplication par $-1$ : Si l'on multiplie un nombre $x$ par $-1$, on obtient son opposé noté $-x$ .

Lorsque le produit comporte plus deux facteurs, on généralise la règle des signes comme suit :

**Propriété :**

- Un produit est positif lorsque le nombre de facteurs négatifs est pair.
- Un produit est négatif lorsque le nombre de facteurs négatifs est impair.

**Exemples :**

- $(-2) \times 5 \times (-3) \times 7 = +2 \times 5 \times 3 \times 7 = 210$ (*2 facteurs négatifs*)
- $(-2) \times (-5) \times 3 \times (-7) = -2 \times 5 \times 3 \times 7 = -210$ (*3 facteurs négatifs*)

### 4) Divisions :

Pour diviser deux nombres relatifs en écriture décimale, il faut au préalable connaître la définition suivante :

**Définition :**

Si le produit de deux nombres est égal à 1, on dit qu'ils sont inverses l'un de l'autre ou que l'un est inverse de l'autre.

Remarques :

- $0$ n'a pas d'inverse car $0 \times a = 0$ pour tout nombre relatif $a$.
- Un nombre non nul et son inverse sont de même signe.

Notation : L'inverse d'un nombre relatif non nul $x$ se note $\frac{1}{x}$ ou $x^{-1}$ ( $x$ *exposant* $-1$)

**Exemple :**

- L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$ ; L'inverse de $-3$ est $-\frac{1}{3}$

**Définition :**

Le quotient d'un nombre relatif $a$ par un nombre relatif non nul $b$ est le nombre par lequel il faut multiplier $b$ pour obtenir $a$ .

C'est-à-dire que le quotient de $a$ par $b$, noté $\frac{a}{b}$, vérifie $b \times \frac{a}{b} = a$

Par conséquent, pour effectuer une division de deux nombres relatifs en écriture décimale, on utilise la propriété suivante :

**Propriété :**

Diviser un nombre $a$ par un nombre $b$ revient à multiplier $a$ par l'inverse de $b$

C'est-à-dire que le quotient de $a$ par $b$, noté $\frac{a}{b}$, vérifie $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$.

Remarque : Si $a$ est un nombre relatif non nul et $-a$ son opposé alors :

$$\frac{a}{1} = a \qquad \frac{a}{-1} = -a \qquad \frac{a}{a} = 1 \qquad \frac{a}{-a} = \frac{-a}{a} = -1 \qquad \frac{0}{a} = 0$$

La propriété précédente implique que pour déterminer le signe d'un quotient de deux nombres relatifs en écriture décimale, on applique aussi la règle des signes :

**Propriété :**

- Le quotient de deux nombres relatifs de même signe est un nombre positif.
- Le quotient de deux nombres relatifs de signe contraire est un nombre négatif.

**Exemples :**

- $\frac{3}{2{,}5} = 1{,}2$ alors 1,2 est la valeur exacte du quotient de 3 et de 2,5.
- $\frac{1}{-3} \approx -0{,}33$ alors $-0{,}33$ est une valeur approchée du quotient de 1 et de $-3$.

## III. Priorités de calcul :

**Convention :**

Dans une expression, on effectue d'abord les calculs entre les parenthèses les plus intérieures, puis les multiplications et les divisions de gauche à droite et, enfin, les additions et les soustractions de gauche à droite.

**Exemples :**

- $(-3) \times \big((-5) + (+3)\big) = (-3) \times (-2) = +6$
- $(-3) + 4 \times (-5) = (-3) + (-20) = -23$
- $\big((-3) + 4\big) \times (-5) = (+1) \times (-5) = -5$